5. Linearne transformacije

(5.01) Linearne transformacije

Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ (za nas to je polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$).

• *Linearna transformacija* sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je definisana kao linearna funkcija T koja preslikava $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$. Tj.

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \quad \text{i} \quad T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$$

ili ekvivalentno

$$T(\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \quad \text{za sve } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{U},\ \alpha\in\mathbb{F}.$$

• *Linearni operator* na $\mathcal{U}$ je definisana kao linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u sebe, tj., linearna funkcija koja preslikava $\mathcal{U}$ nazad u $\mathcal{U}$. ◇

(5.02) Koordinate vektora

Neka je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{U}$, i neka je $\boldsymbol{v}\in\mathcal{U}$. Koeficijente α_i u razlaganju $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + ... + \alpha_n\boldsymbol{u}_n$ se zovu *koordinate od $\boldsymbol{v}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$*, i od sad pa nadalje, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ će označavati kolona vektor

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Oprez! Poredak je važan. Ako je $\mathcal{B}'$ permutacija od $\mathcal{B}$, tada je $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}'}$ odgovarajuća permutacija od $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$. ◇

(5.03) Prostor linearnih transformacija

• Za svaki par vektorskih prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$, skup $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ svih linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

• Neka su $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ i neka su B_{ji} linearne transformacije sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ definisane sa $B_{ji}(\boldsymbol{u}) = \xi_j\boldsymbol{v}_i$, gdje je $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^\top = [\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$. To jest, izaberemo j^{tu} koordinatu od $\boldsymbol{u}$ i prikačimo je na $\boldsymbol{v}_i$.

▷ $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{B_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ je baza za $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

▷ $\dim\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = (\dim\mathcal{U})(\dim\mathcal{V})$. ◇

(5.04) Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. *Matrica koordinata* od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(\boldsymbol{u}_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(\boldsymbol{u}_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(\boldsymbol{u}_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Drugim riječima, ako je $T(\boldsymbol{u}_j) = \alpha_{1j}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{2j}\boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_{mj}\boldsymbol{v}_m$, tada

$$[T(\boldsymbol{u}_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, i kada je samo jedna baza u igri, umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ da označi (kvadratnu) matricu koordinata od T u odnosu na $\mathcal{B}$. ◇

(5.05) Djelovanje kao množenje matricom

Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za svako $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$, djelovanje od T na $\boldsymbol{u}$ je dato pomoću množenja matrice sa koordinatama u smislu da

$$[T(\boldsymbol{u})]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$$

$\diamond$

(5.06) Veza sa algebrom matrica

- Ako su $T, L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ tada
  - ▷ $[\alpha T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \alpha [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ za sve skalare α,
  - ▷ $[T + L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

- Ako su $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i $L \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, i ako su $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$, redom, baze za $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ tada $LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$, i
  - ▷ $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

- Ako je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ invertibilna u smislu da $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ za neki $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ iz $\mathcal{U}$
  - ▷ $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$. $\diamond$

(#) Definišimo f-ju $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sa $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\x-2y\\3x\end{bmatrix}$ za svako $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Pokazati da je T linearna transformacija.

Rj. Prema definiciji linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je linearna f-ja T koja preslikava vekt. prost. $\mathcal{U}$ u vekt. prost. $\mathcal{V}$, tj.

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad i \quad T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad za\ \forall x, y \in \mathcal{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Za svako $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ imamo:

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix}x+x_1\\y+y_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(x+x_1)+(y+y_1)\\(x+x_1)-2(y+y_1)\\3(x+x_1)\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}x+y\\x-2y\\3x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_1-2y_1\\3x_1\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

što znači da vrijedi prva osobina

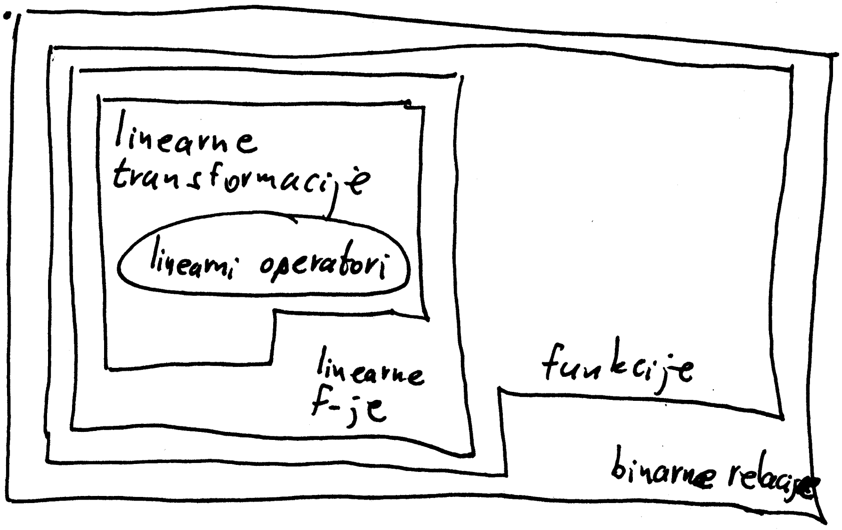
Za svako $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha x-2\alpha y\\3\alpha x\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}x+y\\x-2y\\3x\end{bmatrix} = \alpha T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

vrijedi druga osobina

Jasno je da su $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ vektorski prostor. Prema tome, T čuva sabiranje i skalarno množenje i preslikava jedan vekt. prost. u drugi, pa je linearna transformacija.

Napomena:



orjentaciona šema

(#) Neka je A proizvoljna $m \times n$ matrica. Matrična transformacija $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je definisana sa

$$T_A(x) = Ax$$

za svaku kolonu $x \in \mathbb{R}^n$. Pokazati da je T_A linearna transformacija.

Rj. Prema definiciji linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je f-ja koja preslikava vekt. prost. $\mathcal{U}$ u vekt. prost. $\mathcal{V}$ za koju vrijedi

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad i \quad T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad za \ \forall x, y \in \mathcal{U} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

U našem slučaju za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ imamo

$$T_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y),$$

$$T_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha T_A(x),$$ $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ su vekt. prost.

Prema tome T_A je linearna transformacija.

Odrediti koje od sljedećih f-ja su linearni operatori na $\mathbb{R}^2$.

a) $T(x,y)=(x,1+y)$,

b) $T(x,y)=(0,xy)$,

c) $T(x,y)=(x,\sin y)$.

Rj: Prema definiciji, linearni operator na $\mathcal{U}$ je linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ nazad u $\mathcal{U}$ tj. f-ja za koju vrijedi $T(x,y)=T(x)+T(y)$ i $T(\alpha\cdot x)=\alpha T(x)$ za svako $x,y\in\mathcal{U}$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

a) $T(x,y)=(x,1+y)$

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$.

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(x+x_1,1+y+y_1)=$$
$$=(x,1+y)+(x_1,y_1)=T(x,y)+(x_1,y_1)$$

Prva osobina nije zadovoljena.

T nije linearni operator na $\mathbb{R}^2$

b) $T(x,y)=(0,xy)$.

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(0,(x+x_1)(y+y_1))=$$
$$=(0,xy+xy_1+x_1y+x_1y_1)=(0,xy)+(0,x_1y_1)+(0,xy_1+x_1y)$$
$$=T(x,y)+T(x_1,y_1)+(0,xy_1+x_1y)$$

Prva osobina nije zadovoljena. T nije linearni operator.

c) $T(x,y)=(x,\sin y)$. Za proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ imamo

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(x+x_1,\sin(y+y_1))=$$
$$=(x+x_1,\sin y\cos y_1+\sin y_1\cos y)=(x,\sin y\cos y_1)+(x_1,\sin y_1\cos y)$$

Prva osob. nije zad. T nije lin. oper.

(#) Odrediti koje od sljedećih f-ja su linearni operatori na $\mathbb{R}^2$.

a) $T(x,y)=(y,x)$

b) $T(x,y)=(x^2,y^2)$

c) $T(x,y)=(x+y,x-y)$

Rj. Prema definiciji, linearni operator na $\mathcal{U}$ je linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$ tj. f-ja sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$ t.d. za $\forall x,y\in\mathcal{U}$ i $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ $T(x,y)=T(x)+T(y)$ i $T(\alpha x)=\alpha T(x)$.

a) $T(x,y)=(y,x)$

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ i proizvoljno $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(y+y_1,x+x_1)=(y,x)+(y_1,x_1)=$$
$$=T(x,y)+T(x_1,y_1)$$ vrijedi prva osobina

$$T(\alpha(x,y))=T(\alpha x,\alpha y)=(\alpha y,\alpha x)=\alpha(y,x)=\alpha T(x,y).$$ vrijedi druga osobina

T jest linearni operator

b) $T(x,y)=(x^2,y^2)$. Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=((x+x_1)^2,(y+y_1)^2)=$$
$$=(x^2+2xx_1+x_1^2,\ y^2+2yy_1+y_1^2)=(x^2,y^2)+(x_1^2,y_1^2)+(2xx_1,2yy_1)=$$
$$=T(x,y)+T(x_1,y_1)+(2xx_1,2yy_1)$$

Prva osobina nije zadovoljena. T nije linearni operator.

c) $T(x,y)=(x+y,x-y)$

Izaberimo proizvoljno $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ i proizvoljno $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$T((x,y)+(x_1,y_1))=T(x+x_1,y+y_1)=(x+x_1+y+y_1,\ x+x_1-(y+y_1))=\ldots$$

ZAVRŠITI ZA VJEŽBU ...

T jest linearni operator.

(#) Objasniti zašto je $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ za svaku linearnu transformaciju T.

Rj. T je linearna transformacija pa:

$\forall x,y \quad T(x+y)=T(x)+T(y)$

$\forall x\ \forall \alpha\in\mathbb{R} \quad T(\alpha x)=\alpha T(x) \quad$ (pa je $T(-x)=T((-1)x)=$
$=(-1)T(x)=-T(x)$)

Sad imamo, za proizvoljno x

$T(\mathbf{0})=T(x+(-x))=T(x)+T(-x)=T(x)-T(x)=\mathbf{0}$

q.e.d.

Neka je v fiksirani vektor iz $\mathbb{R}^n$ ($v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $v_i \in \mathbb{R}$) i neka je $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ preslikavanje definisano sa $T(x) = v^T x$ (tj. standardni unitarni proizvod $T(x) = v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n$)

(a) Da li je T linearni operator?

(b) Da li je T linearna transformacija?

Rj.

a) T ne može biti linearni operator zato što linearni operator vektorski prostor preslikava u isti vektorski prostor. U ovom slučaju morali bi imati da se $\mathbb{R}^n$ preslikava ponovo u $\mathbb{R}^n$.

T nije linearni operator.

b) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$ jest vektorski prostor (poznato od ranije). Baza za $\mathbb{R}^n$?

Da li je $\mathbb{R}$ vektorski prostor? Jest (ZAŠTO?). Baza za $\mathbb{R}$?

Šta je vektorsko sabiranje a šta skalarno množenje u $\mathbb{R}$?

Ostaje nam još da provjerimo da li je $T(x) = v^T x$ linearna f-ja.

Izaberimo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^n$ i proizvoljno $\alpha \in \mathbb{R}$

$T(x+y) = v^T(x+y) = v^T x + v^T y = T(x) + T(y)$ vrijedi prva osobina

$T(\alpha x) = v^T(\alpha x) = \alpha v^T x = \alpha T(x)$ vrijedi druga osobina

T jest linearna transformacija.

Za $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ odrediti koja od sljedećih f-ja su linearne transformacije.

a) $T(X_{n\times n}) = AX - XA$

b) $T(A) = A^T$

Rj: <u>Linearna f-ja T koja preslikava vektorski prostor U u vektorski prostor V zovemo linearna transformacija.</u>

a) Iz postavke vidimo da $T: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Provjerimo da li je $T(X) = AX - XA$ linearna f-ja.

$\forall X, Y \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX - XA + AY - YA$$
$$= T(X) + T(Y) \quad \text{vrijedi prva osobina}$$

$$T(\alpha X) = A(\alpha X) - (\alpha X A) = \alpha(AX - XA) = \alpha T(X) \quad \text{vrijedi druga osobina}$$

Prema tome T je linearna transformacija, a kako preslikava $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ u $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, T je linearni operator.

b) Iz postavke vidimo $T: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Provjerimo da li je $T(A) = A^T$ linearna f-ja.

$\forall X, Y \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(X+Y) = (X+Y)^T = X^T + Y^T \quad \text{vrijedi prva osobina}$$
$$T(\alpha X) = (\alpha X)^T = \alpha X^T \quad \text{vrijedi druga osobina}$$

T jest linearna f-ja, sa $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ vezed u $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Kako je $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ vektorski prostor T je linearni operator

(#) Odrediti koja od sljedećih preslikavanja su linearni operatori na $\mathcal{P}_n$ vektorskom prostoru svih polinoma stepena n ili manje.

a) $T = \xi_k D^k + \xi_{k-1} D^{k-1} + \dots + \xi_1 D + \xi_0 I$ gdje je D^k diferencijalni operator k-tog reda (tj. $D^k p(x) = \frac{d^k p}{dx^k}$).

b) $T(p(x)) = x^n p'(0) + x$

Rj.

Linearni operator na $\mathcal{P}_n$ je linearna f-ja koja preslikava $\mathcal{P}_n$ u $\mathcal{P}_n$. Proverimo da li su date f-je linearne.

$$\mathcal{P}_n = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

a) $\forall p(x), g(x) \in \mathcal{P}_n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(p(x)+g(x)) = \xi_k D^k (p(x)+g(x)) + \xi_{k-1} D^{k-1} (p(x)+g(x)) + \dots +$$
$$+ \xi_1 D(p(x)+g(x)) + \xi_0 I(p(x)+g(x)) =$$
$$= \xi_k D^k p(x) + \xi_{k-1} D^{k-1} p(x) + \dots + \xi_1 D p(x) + \xi_0 I p(x)$$
$$+ \xi_k D^k g(x) + \xi_{k-1} D^{k-1} g(x) + \dots + \xi_1 D g(x) + \xi_0 I g(x)$$
$$= T(p(x)) + T(g(x))$$

$$T(\alpha p(x)) = \xi_k D^k (\alpha p(x)) + \xi_{k-1} D^{k-1} (\alpha p(x)) + \dots + \xi_1 D(\alpha p(x)) + I(\alpha p(x))$$
$$= \alpha \left(\xi_k D^k p(x) + \dots + \xi_1 D p(x) + I p(x) \right) = \alpha T(x)$$

Obe osobine su zadovoljene. T jest linearni operator.

b) $\forall p(x), g(x) \in \mathcal{P}_n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(p(x)+g(x)) = x^n (p+g)'(\,) + x = x^n p'(0) + x + x^n g'(0)$$
$$= T(p(x)) + x^n g'(0)$$

Prva osobina nije zadovoljena.
T nije linearni operator.

(#) Ako je v vektor u $\mathbb{R}^3$ čije su standardne koordinate $v=\begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix}$, odrediti koordinate od v u odnosu na bazu

$$\mathcal{B}=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Napomena: Standardna baza za $\mathbb{R}^3$ je $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Rj.

$$v=\begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix}=8e_1+7e_2+4e_3$$

Ono što tražimo u zadatku su tri nepoznate α_1, α_2 i α_3 takve da $v=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=8\\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3&=7\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3&=4\end{aligned}$$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&8\\1&2&2&7\\1&2&3&4\end{array}\right]\underset{III_v+I_v\cdot(-1)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&8\\0&1&1&-1\\0&1&2&-4\end{array}\right]\overset{III_v+II_v\cdot(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&8\\0&1&1&-1\\0&0&1&-3\end{array}\right]$$

$$\underset{I_v-II_v}{\overset{II_v-III_v}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&9\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\end{array}\right]\Rightarrow \alpha_1=9,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=-3$$

$$[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}9\\2\\-3\end{pmatrix}$$

traženo rješenje

(#) Neka je $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linearna transformacija definisana sa $T(x,y) = (x+3y,\ 0,\ 2x-4y)$.

a) Odrediti $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ standardne baze, redom, za $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

b) Odrediti $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}''}$ gdje je $\mathcal{S}''$ baza za $\mathbb{R}^3$ dobijena permutacijom standardne baze, naime $\mathcal{S}'' = \{e_3, e_2, e_1\}$.

Rj. Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\{(1,0), (0,1)\}$.

Standardna baza za $\mathbb{R}^3$ je $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

$\mathcal{S} = \{(1,0), (0,1)\}$, $\mathcal{S}' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\mathcal{S}'' = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$

Neka je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ baza za vektorski prostor $\mathcal{U}$, i neka je $v \in \mathcal{U}$. Koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ obilježavamo sa $[v]_{\mathcal{B}}$, što predstavlja kolona vektor $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ gdje su koeficijenti α_i uzeti iz razvoja $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ (ovaj razvoj je jedinstveno određen).

Sa $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ obilježimo skup svih linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$. $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ je vektorski prostor.

Kako je $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ vektorski prostor to on posjeduje nekakvu bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ pa ima smisla govoriti o koordinatama transformacije $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$.

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ taka da

$$T(u_j) = \alpha_{1j} v_1 + \alpha_{2j} v_2 + \dots + \alpha_{mj} v_m$$

drugim riječima $[T(u_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$. Matrica koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definirana kao $m \times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

a)

$T(x,y) = (x+3y, 0, 2x-4y)$

Da bi odredili $[T]_{\varphi\varphi'}$ trebamo odrediti koordinate vektora $T(1,0)$ i $T(0,1)$ u odnosu na bazu $\varphi' = \{\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)}\}$.

$$T(1,0) = (1,0,2) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 2e_3$$

$$T(0,1) = (3,0,-4) = 3e_1 + 0\cdot e_2 + (-4)e_3$$

Matrica koordinata je $[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

b) Da bi odredili $[T]_{\varphi\varphi''}$ trebamo odrediti koordinate vektora $T(1,0)$ i $T(0,1)$ u odnosu na bazu $\varphi'' = \{e_3=(0,0,1), e_2, e_1\}$

$$T(1,0) = (1,0,2) = 2\cdot e_3 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_1$$

$$T(0,1) = (3,0,-4) = -4e_3 + 0e_2 + 3e_1$$

Matrica koordinata je $[T]_{\varphi\varphi''} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(#) Neka je P linearni operator na $\mathbb{R}^3$ definisan sa $\forall v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ $P(v)=(x,y,0)$. Odrediti $[P]_{\mathcal{B}}$ (matricu koordinata u odnosu na bazu $\mathcal{B}$) gdje je

$$\mathcal{B}=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj. Neka je $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ baza za vektorski prostor $\mathcal{U}$, i neka je $v\in\mathcal{U}$. Koeficijente α_i u razvoju

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$$

zovemo koordinate od v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$, i označavamo $[v]_{\mathcal{B}}$, $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$.

Neka je $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ skup svih linearnih operatora na $\mathcal{U}$ (linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$).
Znamo da je $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ vektorski prostor, $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ ima neku bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, pa možemo pričati o koordinatama proizvoljnog operatora $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, što označavamo $[T]_{\mathcal{B}}$.

Matrica koordinata za $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ je

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}}\\ | & | & & |\end{pmatrix}$$

Drugim riječima ako je $T(u_j)=\alpha_{1j}u_1+\alpha_{2j}u_2+\dots+\alpha_{nj}u_n$

tada $[T(u_j)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\\alpha_{2j}\\\vdots\\\alpha_{nj}\end{pmatrix}$

Rj: Trebamo odrediti matricu

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [P(u_1)]_{\mathcal{B}} & [P(u_2)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [P(u_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$P(u_1) = P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \overset{(*)}{=} u_1 + u_2 - u_3 \Rightarrow [P(u_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

Tražimo α, β i γ t.d. $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Tražimo koordinate vektora $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$

rješenje $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$ ... $(*)$

$$P(u_2) = P\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \overset{(**)}{=} 0u_1 + 3u_2 - 2u_3 \Rightarrow [P(u_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},$$

Tražimo koordinate vektora $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ tj. tražim α, β i γ t.d. $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

rješenje $\alpha = 0, \beta = 3, \gamma = -2$ ... $(**)$

$$P(u_3) = P\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \overset{(***)}{=} 0u_1 + 3u_2 - 2u_3 \Rightarrow [P(u_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Tražimo koordinate vektora $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

rješenje: $\alpha = 0, \beta = 3, \gamma = -2$ ... $(***)$

Matrica koordinata je

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

(#) Za operator $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisan sa

$$T(x,y) = (x+y,\ -2x+4y)$$

odrediti $[T]_{\mathcal{B}}$, gdje je $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Rj: Neka je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza za vektorski prostor $\mathcal{U}$, i neka je $v \in \mathcal{U}$. Koeficijenti α_i u proširenju

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

zovemo koordinate od v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$, i obilježavamo sa $[v]_{\mathcal{B}}$, i tumačimo kao kolona vektor

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Skup $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ svih linearnih operatora na $\mathcal{U}$ je vektorski prostor. Kako je $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ vektorski prostor to on posjeduje bazu.

Skup $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1}, B_{21}, B_{22}, \ldots, B_{2m}, \ldots, B_{nn}\}$

$$= \{B_{ji}\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

gdje su B_{ji} linearni operatori na $\mathcal{U}$ definisani sa

$B_{ji}(u) = \xi_j u_i$, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T = [u]_{\mathcal{B}}$ (izaberemo j-tu koordinatu od u i prikačimo je na u_i)

je baza za $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$.

Sad ima smisla govoriti o koordinatama od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$.

Matrica koordinata za $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ je definisana kao $m \times n$ matrica:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Drugim riječima ako je $T(u_j) = \alpha_{1j} u_1 + \alpha_{2j} u_2 + \dots + \alpha_{mj} u_n$ tada $[T(u_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$.

Data je baza $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \{u_1, u_2\}$ za $\mathbb{R}^2$

$$T(u_1) = T(1,1) = (2, -2+4) = (2,2) = 2(1,1) + 0(1,2) = 2u_1 + 0u_2$$

$$\Rightarrow \quad [T(u_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(u_2) = T(1,2) = (1+2, -2+8) = (3,6) \overset{(*)}{=} 0(1,1) + 3(1,2)$$

$$= 0u_1 + 3u_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ - \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = 6 \\ \hline -\alpha_2 = -3 \end{array} \qquad \dots (*)$$

$$\alpha_2 = 3 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad [T(u_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Prema tome $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(7) Neka je T operator na $\mathbb{R}^3$ definisan sa

$$T(x,y,z) = (x-y,\ y-x,\ x-z)^T$$

i posmatrajmo vektor $v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ i bazu $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

a) Odrediti $[T]_{\mathcal{B}}$ i $[v]_{\mathcal{B}}$

b) Odrediti $[T(v)]_{\mathcal{B}}$ i provjeriti da li $[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$

Rj.

Dat je vektor v koji u odnosu na standardnu bazu ima koordinate $v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = e_1 + e_2 + 2e_3$.

Da bi odredili $[v]_{\mathcal{B}}$ tražimo koordinate $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ t.d.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Odma vidimo da je rješenje $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=0$ tj. $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Da bi odredili $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [T(1,0,1)^T]_{\mathcal{B}} & [T(0,1,1)^T]_{\mathcal{B}} & [T(1,1,0)^T]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$

potrebno je odrediti koordinate vektora $T(1,0,1)$, $T(0,1,1)$ i $T(1,1,0)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$T(1,0,1) = (1,-1,0)^T = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=0$$

$$T(0,1,1) = (-1,1,-1)^T = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha + \gamma = -1\\ \beta + \gamma = 1\\ \alpha + \beta = -1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\1&1&0&-1\end{array}\right] \underset{\sim}{III_v + I_v\cdot(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&1&-1&0\end{array}\right] \underset{\sim}{III_v + II_v\cdot(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&0&-2&-1\end{array}\right] \underset{\sim}{III_v : (-2)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&0&1&1/2\end{array}\right] \underset{I_v + III_v\cdot(-1)}{\overset{II_v + III_v\cdot(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3/2\\0&1&0&1/2\\0&0&1&1/2\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha = -\frac{3}{2}\\ \beta = 1/2\\ \gamma = 1/2\end{array}$$

$$T(1,1,0) = (0,0,1)^T = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}\alpha \quad +\gamma &= 0\\ \beta+\gamma &= 0\\ \alpha+\beta \quad &= 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ za vježbu $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = -\frac{1}{2}$

Prema tome
$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b) $T(v) = T(1,1,2) = (0,0,-1)^T$

Da bi odredili $[T(v)]_{\mathcal{B}}$ potrebno je odrediti koordinate vektora $T(v)$ u odnosu na baza $\mathcal{B}$.

$T(v) = (0,0,-1)^T$ pa tražimo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.d.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}\alpha \quad +\gamma &= 0\\ \beta+\gamma &= 0\\ \alpha+\beta \quad &= -1\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{III_v + I_v\cdot(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{III_v + II_v\cdot(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{III_v : (-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \underset{I_v + III_v\cdot(-1)}{\overset{II_v + III_v\cdot(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned}\alpha &= -\tfrac{1}{2} \\ \beta &= -\tfrac{1}{2}\end{aligned} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$$

Data jednakost vrijedi.

(#) Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ redom baze vektorskih prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka su B_{ji} linearne transformacije sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ definisane sa $B_{ji}(u)=\xi_j v_i$ gdje je $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T=[u]_{\mathcal{B}}$. Pokazati da je skup $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}=\{B_{11},B_{12},\dots,B_{1m},B_{21},B_{22},\dots,B_{2m},\dots,B_{nm}\}$ linearno nezavisan.

Rj. Da bi pokazali linearnu nezavisnost posmatrajmo sistem

$$\eta_{11}B_{11}+\eta_{12}B_{12}+\dots+\eta_{1m}B_{1m}+\eta_{21}B_{21}+\dots+\eta_{nm}B_{nm}=0$$

za skalare η_{ji} i primjetimo da za svaki $u_k\in\mathcal{B}$

$$B_{ji}(u_k)=\begin{cases} v_i, & \text{ako je } j=k \\ 0, & \text{ako je } j\neq k \end{cases}$$

zato što

$$\begin{aligned} u_1 &= 1\cdot u_1+0\cdot u_2+\dots+0\cdot u_n \\ u_2 &= 0\cdot u_1+1\cdot u_2+\dots+0\cdot u_n \\ &\vdots \\ u_k &= 0\cdot u_1+0\cdot u_2+\dots+1\cdot u_k+\dots+0\cdot u_n \\ &\vdots \\ u_n &= 0\, u_1+0\cdot u_2+\dots+1\cdot u_n. \end{aligned}$$

Drugim riječima

$$[u_k]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow k\text{-ta pozicija}.$$

$$\Rightarrow\quad 0=\Big(\sum_{j,i}\eta_{ji}B_{ji}\Big)(u_k)=\sum_{j,i}\eta_{ji}B_{ji}(u_k)=\sum_{i=1}^{m}\eta_{ki}v_i$$

Za svaki k, nezavisnost od $\mathcal{B}'$ povlači da je $\eta_{ki}=0$ za svaki i, i prema tome $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ je linearno nezavisan skup. q.e.d.

(#) Iz teorije linearne algebre znamo (a to nije teško ni pokazati) da za svaki par vektorskih prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ nad poljem $\mathbb{R}$, skup $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, svih linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$, je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka su B_{ji} linearne transformacije sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ definisane sa

$$B_{ji}(u)=\xi_j v_i$$

gdje je $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T=[u]_{\mathcal{B}}$. Dokazati da skup

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}}=\{B_{11},B_{12},\dots,B_{1m},B_{21},B_{22},\dots,B_{2m},\dots,B_{nm}\}$$

generiše $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

Rj. Neka je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ i odredimo djelovanje od T na proizvoljnom vektoru $u\in\mathcal{U}$.

Kako je $u\in\mathcal{U}$ $\exists!\,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\in\mathbb{R}$ t.d.

$$u=\xi_1u_1+\xi_2u_2+\dots+\xi_nu_n.$$ Dalje

$T(u_j)\in\mathcal{V}$ pa $\exists!\,\alpha_{1j},\alpha_{2j},\dots,\alpha_{mj}$ t.d.

$$T(u_j)=\alpha_{1j}v_1+\alpha_{2j}v_2+\dots+\alpha_{mj}v_m$$

Sad imamo $T(u)=T\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_ju_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\xi_jT(u_j)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}v_i$
$=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\xi_jv_i=\sum_{i,j}\alpha_{ij}B_{ji}(u).$

Ovo vrijedi za $\forall u\in\mathcal{U}$ t.d. $T=\sum_{i,j}\alpha_{ij}B_{ji}$ pa $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ generiše $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

(#) Za $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, neka je T linearni operator na $\mathbb{R}^n$ definisan sa $T(x) = Ax$. Tj. T je operator definisan sa matričnim množenjem. Pokazati da je u odnosu na standardnu bazu φ, $[T]_\varphi = A$.

Rj: Standardna baza za $\mathbb{R}^n$ je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

Znamo da

$$[T]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \left[T\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right]_\varphi & [T(e_2)]_\varphi & \dots & [T(e_n)]_\varphi \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Prema tome trebamo naći koordinate vektora $T(e_1), T(e_2), \dots T(e_n)$ u odnosu na standardnu bazu φ.

$$T(e_1) = A\cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{bmatrix} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$$

$$T(e_2) = A\cdot e_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{bmatrix} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$T(e_n) = A\cdot e_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{bmatrix} = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

Prema tome

$$[T]_\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} = A$$

q.e.d.

(#) Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Pokazati da za $\forall u \in \mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}.$$

Rj. Neka je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.

Za proizvoljan $u \in \mathcal{U}$ $\exists! \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ t.d. $u = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_n u_n$ i za $\forall u_j \in \mathcal{B}$ $\exists! \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ t.d. $T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i$. Tada

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sad imamo

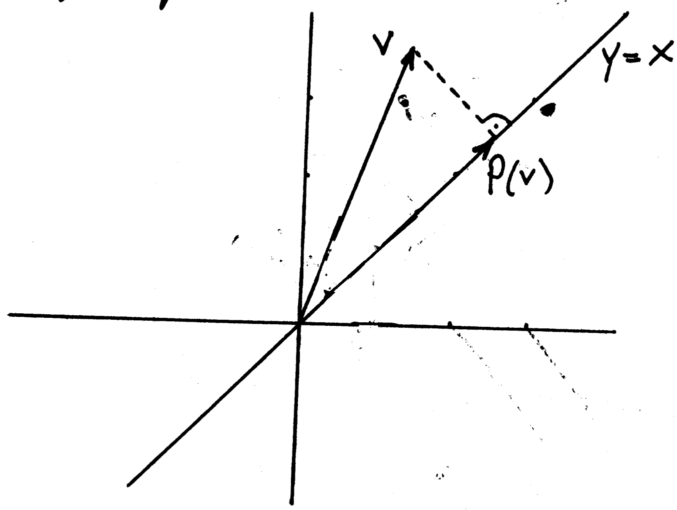
$$T(u) = T(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_n u_n) = \xi_1 T(u_1) + \xi_2 T(u_2) + \dots + \xi_n T(u_n) =$$
$$= \xi_1 \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} v_i + \xi_2 \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2} v_i + \dots + \xi_n \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} v_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_j v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \right) v_i$$

Drugim riječima, koordinate od $T(u)$ u odnosu na $\mathcal{B}'$ su $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j$ za $i = 1, 2, \dots, m$ pa prema tome

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \xi_j \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} \xi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$$

q.e.d.

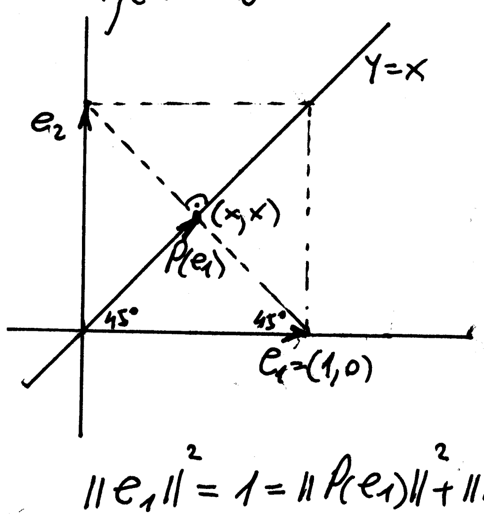
(#) Neka je P projekcija koja preslikava svaku tačku $v \in \mathbb{R}^2$ na njezinu ortogonalnu projekciju na pravu $y=x$ kao što je prikazano na slici



a) Odrediti koordinate matrice P u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti ortogonalnu projekciju od $v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ na pravu $y=x$.

Rj. P je u stvari linearni operator na $\mathbb{R}^2$.
Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\{e_1,e_2\}$.
Primjetimo da $P(e_1)=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=P(e_2)$ (vidi sliku) te da



vrhovi vektora e_1, $P(e_1)$ i 0 formiraju jkk pravougli trougao.
Ako su $\|P(e_1)\|$ i $\|e_1\|$ označimo, redom, dužinu vektora $P(e_1)$ i e_1 na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$\|e_1\|^2=1=\|P(e_1)\|^2+\|P(e_1)\|^2=2\|P(e_1)\|^2=4x^2 .$$ Isto tako
$$\|e_2\|^2=1=\|P(e_2)\|^2+\|P(e_2)\|^2=2\|P(e_2)\|^2=2\left(\sqrt{x^2+x^2}\right)^2=4x^2$$

Prema tome $\quad x^2=\dfrac{\|e_1\|^2}{4}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ pa

$P(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2$

$P(e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2$

Znamo da $[P]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | \\ [P(e_1)]_\varphi & [P(e_2)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix}$

pa je $[P]_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Iz teorije Linearne algebre znamo:

Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za vektorske prostore U i V, i neka je $T \in \mathcal{L}(U,V)$. Tada za $\forall u \in U$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$$

U našem slučaju

$$\left[P\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi = [P]_\varphi \cdot \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Tj. ortogonalna projekcija od $v = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$

(#) Ako je T linearni operator na prostoru V sa bazom $\mathcal{B}$, objasniti zašto je $[T^k]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^k$ za sve nenegativne cijele k.

Rj.

Iz teorije linearn algebre znamo da

Ako su $T, L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ tada

$$[\alpha T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \alpha [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \quad \text{za } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$[T + L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \quad \text{i}$$

$$[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Prema tome

$$[T^k]_{\mathcal{B}} = [\underbrace{T\,T \ldots T}_{k \text{ puta}}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} \ldots [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^k$$

q.e.d.

(#) Pokazati da se djelovanje operatora $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}$ na prostor $\mathcal{P}_3$ svih polinoma stepena 3 ili manje, može prikazati kao matrično množenje.

Rj. $\mathcal{P}_3 = \{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_0 \in \mathbb{R} \}$

Za bazu od $\mathcal{P}_3$ možemo uzeti $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [D(1)]_{\mathcal{B}} & [D(x)]_{\mathcal{B}} & [D(x^2)]_{\mathcal{B}} & [D(x^3)] \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$D(1) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \Rightarrow [D(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = 1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \Rightarrow [D(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \Rightarrow [D(x^2)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ako je $p = p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \Rightarrow D(p) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2$

$$\Rightarrow [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad i \quad [D(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Djelovanje D se može prikazati kao matrično množenje zato što

$$[D(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = [D]_{\mathcal{B}} [p]_{\mathcal{B}}$$

Neka su $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i $L \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, i neka su $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$ redom baze za $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$. Pokazati da

a) $LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$

b) $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Rj.

a) Označimo sa C f-ju $C: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ t.d. $C(x) = L(T(x))$ (primjetimo da je C kompozicija od L i T, $C = LT$).

Pokažimo linearnost

$\forall x, y \in \mathcal{U}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$C(\alpha x + y) = L(T(\alpha x + y)) = L(\alpha T(x) + T(y)) =$$
$$= \alpha L(T(x)) + L(T(y)) = \alpha C(x) + C(y).$$

Prema tome $LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.

b) Ovdje ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:
Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za $\forall u \in \mathcal{U}$ $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$.

$LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$, $\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}''$ je baza za $\mathcal{W}$.
Za proizvoljan vektor $u \in \mathcal{U}$ imamo

$$[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} [u]_{\mathcal{B}} = [LT(u)]_{\mathcal{B}''} = [L(T(u))]_{\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T(u)]_{\mathcal{B}'} =$$
$$= [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}.$$

Ovo vrijedi za sve $u \in \mathcal{U}$, pa $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

q.e.d.

(#) Ako je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ invertibilna u smislu da $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ za neko $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ pokazati da tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ od $\mathcal{U}$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Rj. Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna baza za $\mathcal{U}$ npr.

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Primjetimo da je $\dim \mathcal{U} = n$, i da je za transformaciju

$$I(x) = x \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

$$[I]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [I(u_1)]_{\mathcal{B}} & [I(u_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [I(u_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [u_1]_{\mathcal{B}} & [u_2]_{\mathcal{B}} & \dots & [u_n]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = I_n$$

Znamo da: Ako su $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ i $L \in (\mathcal{V},\mathcal{W})$ i ako su $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$ redom baze za $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ tada

$$\underline{[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

U našem slučaju

$$I_n = [I]_{\mathcal{B}} = [TT^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \quad [T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

(#)

Neka je $T: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linearna transformacija. Pokazati da vrijedi

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ za $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
3. $T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_k T(\mathbf{v}_k)$ za $\forall \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ i za $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$.

dokaz:

1. $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0\,T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ za $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

2. $T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)\,T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ za $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

3. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po k

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $T(\alpha_1 \mathbf{v}_1) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1)$ (prema drugoj aksiomi)

$k=2$: $T(\underbrace{\alpha_1 \mathbf{v}_1}_{\in \mathcal{V}} + \underbrace{\alpha_2 \mathbf{v}_2}_{\in \mathcal{V}}) \overset{\text{prema prvoj aksiomi}}{=} T(\alpha_1 \mathbf{v}_1) + T(\alpha_2 \mathbf{v}_2) \overset{\text{druga aksioma}}{=} \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2)$

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za određeno $k \geq 1$ i pokažimo da tad vrijedi za $k+1$.

$$T(\underbrace{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k}_{\in \mathcal{V}} + \underbrace{\alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}}_{\in \mathcal{V}}) \overset{\text{prema prvoj aksiomi}}{=} T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k) + T(\alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1})$$

$$\underset{\text{i prema drugoj aksiomi}}{\overset{\text{prema pretpost}}{=}} \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_k T(\mathbf{v}_k) + \alpha_{k+1} T(\mathbf{v}_{k+1})$$

ZAKLJUČAK

Tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj k.

#

Neka su $T: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ i $S: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ dvije linearne transformacije. Pretpostavimo da je $\mathcal{V} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ako je $T(v_i) = S(v_i)$ za svako i, pokazati da je $S = T$.

dokaz:

Izaberimo proizvoljno $v \in \mathcal{V}$ i napišimo ga u obliku

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Tada, prema jednom od prethodnih zad. imamo

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) =$$
$$= \alpha_1 S(v_1) + \dots + \alpha_n S(v_n) = S(v)$$

Sad, kako S i T imaju isto djelovanje, možemo zaključiti

$$S = T.$$

q.e.d.

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2) + \dots + \alpha_n S(v_n) \\ &= S(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = S(v) \end{aligned}$$

#

Neka su V i W vektorski prostori i neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza od V. Za proizvoljne vektore $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$ (koji ne moraju biti različiti), dokazati da postoji jedinstvena linearna transformacija $T: V \to W$ koja zadovoljava $T(e_i) = w_i$ za svako $i = 1, 2, \dots, n$.
U stvari djelovanje od T je sljedeće: Za dati vektor $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ iz V vrijedi

$$T(v) = T(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n .$$

dokaz:

Pokažimo prvo jedinstvenost. Ako takva transformacija T postoji, i S je neka druga takva transformacija, tada:

$$T(e_i) = w_i = S(e_i)$$

vrijedi za svako i, pa je $S = T$ prema prethodnom zadatku. Prema tome, ako postoji, T je jedinstveno i preostaje nam samo još da pokažemo da postoji takva linearna transformacija.

Za proizvoljno $v \in V$ moramo definisati određeno $T(v) \in W$. Kako je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza od V imamo $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ gdje su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jedinstveno određeni zbog v (ZAŠTO?). Pa možemo definisati $T: V \to W$ sa

$$T(v) = T(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$$

za svaki $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V$. Ovo zadovoljava $T(e_i) = w_i$ za $\forall i$.
Ostaje još da pokažemo da je T linearna transformacija.
$\forall v_1, v_2 \in V$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(v_1 + v_2) = \left| \begin{array}{l} v_1 \text{ i } v_2 \text{ se mogu na jedinstven način} \\ \text{prikazati pomoću baze od } V \\ v_1 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n \\ v_2 = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n \end{array} \right| = T(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n)$$

$$= T((\beta_1 + \gamma_1) e_1 + \dots + (\beta_n + \gamma_n) e_n) = (\beta_1 + \gamma_1) w_1 + \dots + (\beta_n + \gamma_n) e_n = \dots$$

završiti za vježbu i pokazati da je $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1)$.

(7)

Neka je $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ data linearna transformacija. Vektore iz $\mathbb{R}^n$ ćemo pisati u obliku kolona. Pokazati da

1. Postoji $m \times n$ matrica A takva da $T(x) = Ax$ za $\forall x \in \mathbb{R}^n$, drugim riječima $T = T_A$.
2. Kolone matrice A su redom $T(e_1), \dots, T(e_n)$ gdje je $\{e_1, \dots, e_n\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Prema tome A se može napisati u obliku svojih kolona kao

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

dokaz:

Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$; i izaberimo proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$. Tada postoje jedinstveni $\alpha_i \in \mathbb{R}$ takvi da

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

Kako je data linearna transformacija T, to su $T(e_1), \dots, T(e_n)$ jedinstveno određeni, pa napišimo da je

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad T(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sad matricu A definišimo kao $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $m \times n$ matrica čija je j-ta kolona $T(e_j)$.

Izračunajmo $T(x)$, korištenjem jednog od prethodnih zadataka

$$T(x) = T(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 T(e_1) + \dots + \alpha_n T(e_n) =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= Ax = T_A(x)$$

Kako ovo vrijedi za $\forall x \in \mathbb{R}^n$, slijedi da $T = T_A$.

Napomena: Matricu A zovemo standardna matrica od T.

Zadaci za vježbu

1. Za $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ odrediti koje od sljedećih f-ja su linearne transformacije.

   (a) $T(x) = Ax + b$ za $b \neq 0$;

   (b) $T(X) = (X + X^T)/2$.

2. Za standardnu bazu $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ za prostor $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, odrediti matricu $[T]_{\mathcal{S}}$ za svaki od sljedećih linearnih operatora na $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pa onda provjeriti $[T(U)]_{\mathcal{S}} = [T]_{\mathcal{S}}[U]_{\mathcal{S}}$ za $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   (a) $T(X) = \dfrac{X + X^T}{2}$

   (b) $T(X) = AX - XA$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Za $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_3$ (prostoru svih polinoma stepena manje od ili jednako od dva i tri, redom), neka je $S: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ linearna transformacija definisana sa
$$S(p) = \int_0^t p(x)\,dx.$$
Odrediti $[S]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, gdje je $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ i $\mathcal{B}' = \{1, t, t^2, t^3\}$.

4. Neka je Q linearni operator na $\mathbb{R}^2$ koji rotira svaku tačku u smjeru suprotnom kazaljci na satu za ugao θ, i neka je R linearni operator na $\mathbb{R}^2$ koji reflektira svaku tačku preko x-ose.

   (a) Odrediti matricu za kompoziciju $[RQ]_{\mathcal{S}}$ u odnosu na standardnu bazu $\mathcal{S}$.

   (b) U odnosu na standardnu bazu, odrediti matricu linearnog operatora koji rotira svaku tačku u $\mathbb{R}^2$ u smjeru suprotnom kazaljci na satu, za ugao 2θ.

(ova stranica je ostavljena prazna)